Απειροστικός Λογισμός III 10/10/2016

3ο Μάθημα

→ Τι είναι το $\mathbb{R}^n$;

<u>απάντηση</u>

Ο $\mathbb{R}^n$ είναι ο χώρος των διανυσμάτων $\bar{x}=(x_1,..,x_n)=x_1\bar{e}_1+..+x_n\bar{e}_n$ (πάνω από το $\mathbb{R}$) με πράξεις

$$\bar{x}+\bar{y}=(x_1,..,x_n)+(y_1,..,y_n)\overset{\text{ορισμός}}{:=}(x_1+y_1,...,x_n+y_n)$$

και τις γνωστές ιδιότητες των πράξεων αυτών (επανάληψη)

Στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\bar{x}\cdot\bar{y}=(x_1,..,x_n)\cdot(y_1,..,y_n):=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

με τις ιδιότητες
$$\begin{cases}\bar{x}\cdot\bar{y}=\bar{y}\cdot\bar{x}\\ (a\bar{x}+b\bar{y})\cdot\bar{z}=a\bar{x}\cdot\bar{z}+b\bar{y}\bar{z}\\ \bar{x}\cdot\bar{x}=0\Rightarrow\bar{x}=0 \quad \bar{x}\cdot\bar{x}\geq 0 \quad \forall\,\bar{x}\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

→ Ο $\mathbb{R}^n$ είναι διαν. χώρος με εσωτ. γινόμενο

Ακόμα με την <u>(Ευκλείδεια) νόρμα</u> (ή <u>στάθμη</u>)

$$\|\bar{x}\|:=\sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}},\quad \bar{x}\in\mathbb{R}^n$$
$$\overset{!}{=}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)\in\mathbb{R}$$

(= <u>το μήκος του διανύσματος</u>), δηλ. μια απεικόνιση

$\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

α) $\|\bar{x}\|\geq 0 \quad \forall\,\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ και $\|\bar{x}\|=0\Leftrightarrow\bar{x}=\bar{0}:=(0,..,0)\in\mathbb{R}$

β) $\|a\bar{x}\|=|a|\,\|\bar{x}\| \quad \forall\,\bar{x}\in\mathbb{R}^n,\ \forall\,a\in\mathbb{R}$

γ) $\|\bar{x}+\bar{y}\|\leq\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\| \quad \forall\,\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$ (τριγωνική ανισότητα)

Για την ~~ακρίβεια~~ απόδειξη του γ) χρειαζόμαστε την ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$|\bar{x}\cdot\bar{y}|\leq\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\| \quad \forall\,\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$$

Απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Schwartz

α) Έστω $\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δηλ. $\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$ $a\bar{x}+b\bar{y}\neq\bar{0}$

και ειδικότερα $\forall d \in \mathbb{R} : d\bar{x}+\bar{y} \neq \bar{0} \overset{(\alpha)}{\Longleftrightarrow} \|d\bar{x}+\bar{y}\| > 0$

$$\Rightarrow 0 < \|d\bar{x}+\bar{y}\|^2 = (d\bar{x}+\bar{y})\cdot(d\bar{x}+\bar{y}) =$$
$$= (d\bar{x}+\bar{y})\cdot d\bar{x} + (d\bar{x}+\bar{y})\cdot\bar{y} =$$
$$= d^2\,\bar{x}\cdot\bar{x} + d\,\bar{y}\cdot\bar{x} + d\,\bar{x}\cdot\bar{y} + \bar{y}\cdot\bar{y} =$$
$$= d^2\|\bar{x}\|^2 + 2d\,\bar{x}\cdot\bar{y} + \|\bar{y}\|^2 \quad \forall d \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ η διακρίνουσα του δευτεροβαθμίου πολυωνύμου (ως προς d του $\mathbb{R}$) είναι αρνητική:

$$\cancel{4}(\bar{x}\cdot\bar{y})^2 - \cancel{4}\|\bar{x}\|^2\|\bar{y}\|^2 < 0$$
$$\Leftrightarrow |\bar{x}\cdot\bar{y}| < \|\bar{x}\|\|\bar{y}\|$$

β) Αν τα $\bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0,0\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε $\exists\, d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ με $\bar{y} = d\bar{x}$ και η <u>ανισότητα CS</u> έχει τη μορφή $|d|\,\|\bar{x}\|^2 = |d|\,\|\bar{x}\|^2$

γ) Αν κάποιο από τα $\bar{x}, \bar{y}$ είναι $= \bar{0}$

<u>Απόδειξη του γ</u>

ΘΔΟ $\underbrace{\|\bar{x}+\bar{y}\|^2}_{= (\bar{x}+\bar{y})(\bar{x}+\bar{y}) = \|\bar{x}\|^2 + \underbrace{\bar{y}\cdot\bar{x} + \bar{x}\cdot\bar{y}}_{=2\bar{x}\cdot\bar{y}} + \|\bar{y}\|^2} \leq (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2 = \|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\| + \|\bar{y}\|^2$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\bar{x}\cdot\bar{y}}_{=|\bar{x}\cdot\bar{y}|} \leq \|\bar{x}\|\,\|\bar{y}\|$$

Το οποίο ισχύει αφού έχουμε $\underbrace{\bar{x}\cdot\bar{y}}_{\in \mathbb{R}} \leq |\bar{x}\cdot\bar{y}| \overset{\text{ανισότητα CS}}{\leq} \|\bar{x}\|\,\|\bar{y}\|$

<u>Επίσης ισχύει η αντίστροφη τριγωνική ανισότητα</u>

$$\boxed{\big|\,\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\|\,\big| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\| \quad \forall \bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^n}$$

$$\|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 - 2\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|^2 = (\bar{x}-\bar{y}) = \cancel{x}$$
$$= \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 - 2\bar{x}\bar{y}$$

$\Leftrightarrow \|\bar{x}\| \|\bar{y}\| \geq \bar{x} \cdot \bar{y}$

Εναλλακτικά: $\|\bar{x}\| = \|\bar{x}-\bar{y}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\| + \|\bar{y}\|$

$\Leftrightarrow \|\bar{x}\| - \|\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|$

και, αντίστοιχα, $\|\bar{y}\| - \|\bar{x}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|$

$\left.\begin{array}{l} \|\bar{x}\| - \|\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\| \\ \|\bar{y}\| - \|\bar{x}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\| \end{array}\right\} \Rightarrow \big| \|\bar{x}\| - \|\bar{y}\| \big| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|$

Συμπέρασμα: Ο $\mathbb{R}^n$ είναι λοιπόν ένας διαν. χώρος με εσωτερικό γινόμενο το οποίο επάγει μια νόρμα και λέμε ότι ο $\mathbb{R}^n$ είναι <u>χώρος με νόρμα</u>. Εκτός από την Ευκλείδεια νόρμα $\|\bar{x}\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ <u>υπάρχουν και άλλες νόρμες στον $\mathbb{R}^n$.</u>

<u>πχ</u>

Η νόρμα μεγίστου (ή νόρμα «απείρου»)

$\|\bar{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ όπου $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες μιας νόρμας.

(ΑΣΚΗΣΗ..)

πχ $\|\bar{x}\|_\infty = 0$

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad 0 \leq |x_i| \leq \|\bar{x}\|_\infty = 0$

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad x_i = 0$

$\Rightarrow \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) = \bar{0}$

$\max\{|a||x_1|, \dots, |a||x_n|\}$

$= |a| \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

$\|\bar{x}+\bar{y}\|_\infty = \max\{|x_1+y_1|, \dots, |x_n+y_n|\}$

$\forall i = 1, \dots, n: \quad |x_i + y_i| \leq \underbrace{|x_i|}_{\leq \|\bar{x}\|_\infty} + \underbrace{|y_i|}_{\leq \|\bar{y}\|_\infty} \leq \|\bar{x}\|_\infty + \|\bar{y}\|_\infty$

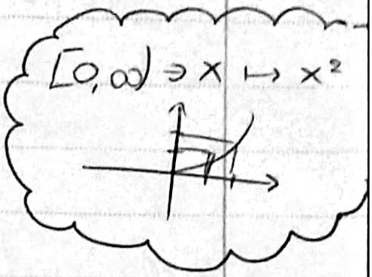
$\Rightarrow \|\bar{x}+\bar{y}\|_\infty \leq \|\bar{x}\|_\infty + \|\bar{y}\|_\infty$

και η οποία είναι <u>ισοδύναμη</u> με Ευκλείδεια νόρμα,
δηλ. $\exists\, c_1, c_2 > 0 : \; c_1 \|\bar{x}\| \le \|\bar{x}\|_\infty \le c_2 \|\bar{x}\| \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}$

Πράγματι,

$$\|\bar{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i^2}_{=(|x_i|)^2} \le \|\bar{x}\|_\infty^2$$

$$|x_i| \le \|\bar{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$



$$\le \sum_{i=1}^{n} \|\bar{x}\|_\infty^2 = n \|\bar{x}\|_\infty^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\bar{x}\| \le \sqrt{n}\, \|\bar{x}\|_\infty}$$

και $|x_i|^2 \le \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = \|\bar{x}\|^2$

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad |x_i| \le \|\bar{x}\|$

$\Rightarrow \|\bar{x}\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$ ($= |x_{i_0}|$ για κάποιο $i_0 \in \{1, \dots, n\}$)

$\le \|\bar{x}\|$, δηλ. $\boxed{\|\bar{x}\|_\infty \le \|\bar{x}\|}$

~~και η οποία είναι ισοδύναμη~~

$\Rightarrow$ με $c_2 = 1$ και $c_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ όπου και n η διάσταση του $\mathbb{R}^n$

οι $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\infty$ είναι <u>ισοδύναμες</u>.

Τέλος, (εκτός από το ότι το $\mathbb{R}^n$ είναι διαν. χώρος (→ πράξεις διανυσμάτων) έχει εσωτερικό γινόμενο, έχει (την επαγόμενη νόρμα) ο $\mathbb{R}^n$ έχει και μια (επαγόμενη από τη νόρμα) <u>μετρική</u> ή <u>απόσταση δύο σημείων</u> του,
$\|\bar{x} - \bar{y}\| =: d(\bar{x}, \bar{y})$, δηλ. μια απεικόνιση $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
με τις ιδιότητες:

α) συμμετρία: $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$

β) μη αρνητικότητα: $d(\bar{x}, \bar{y}) \ge 0 \;\; \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ και $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$

γ) τριγωνική ανισότητα : $d(\bar{x},\bar{y}) \leq d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y}) \quad \forall \bar{x},\bar{y},\bar{z} \in \mathbb{R}^n$

[Το ότι η Ευκλείδεια απόσταση $d(\bar{x},\bar{y}) := \|\bar{x}-\bar{y}\|$ έχει αυτές τις ιδιότητες, προκύπτει από τις ιδιότητες της νόρμας $\rightarrow$ άσκηση]